CAPÍTULO I – VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Prof. Gilson Fernandes da Silva

Departamento de Ciências Florestais e da Madeira (DCFM)
Programa de Pós-graduação em Ciências Florestais (PGCF)
Universidade Federal Espírito Santo (UFES)

1. OBJETIVOS DO CAPÍTULO I

- Apresentar conceitos básicos sobre variáveis aleatórias.

- Definir funções de probabilidade e funções densidade de probabilidade.

- Definir independência entre variáveis aleatórias.

- Apresentar medidas de posição e medidas de dispersão de variáveis aleatórias.

2. CONCEITOS BÁSICOS SOBRE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

2.1. VARIÁVEL: Chama-se de variável ao atributo (característica) estudado, sujeito a variação. Podem ser qualitativas ou quantitativas, discretas ou contínuas, fixas ou aleatórias.

2.2. VARIÁVEL ALEATÓRIA (*va*): É toda e qualquer variável associada a uma probabilidade, isto é, seus valores estão relacionados a um experimento aleatório.

Exemplo de uma variável aleatória:

Suponha-se que atiremos duas moedas e consideremos o espaço associado a este experimento, isto é,

$S = \{CC,\ CK,\ KC,\ KK\}$

A variável aleatória X pode ser definida como: O número de caras (C) obtidas nas duas moedas. Então, $X(CC) = 2$; $X(CK) = X(KC) = 1$ e $X(KK) = 0$. Note que a cada valor de X está associado uma probabilidade.

2.3. VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA (*vad*): Seja X uma variável aleatória (v.a.). Se o número de valores possíveis de X for finito ou infinito numerável, denominaremos X de variável aleatória discreta. Em outras palavras, os valores possíveis de X podem ser postos em uma lista como $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Em geral, a ***vad*** é obtida por alguma forma de contagem.

Exemplos:

- Número de árvores,
- Número de máquinas,
- Número de pessoas.

2.3.1. FUNÇÃO DE PROBABILIDADE: Chama-se de função de probabilidade (*fp*) da variável aleatória discreta X, a função $P(X = x_i) = P(x_i) = P_i$, que a cada valor de x_i, associa sua probabilidade de ocorrência.

A função $P(x_i)$ será uma função de probabilidade se atender às seguintes exigências:

a) $P(x_i) \geq 0$, *para todo* x_i

b) $\sum P(x_i) = 1$

À coleção de pares $[x_i, P(x_i)]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, denominaremos distribuição de probabilidade da vad X, que pode ser representada por tabelas e gráficos.

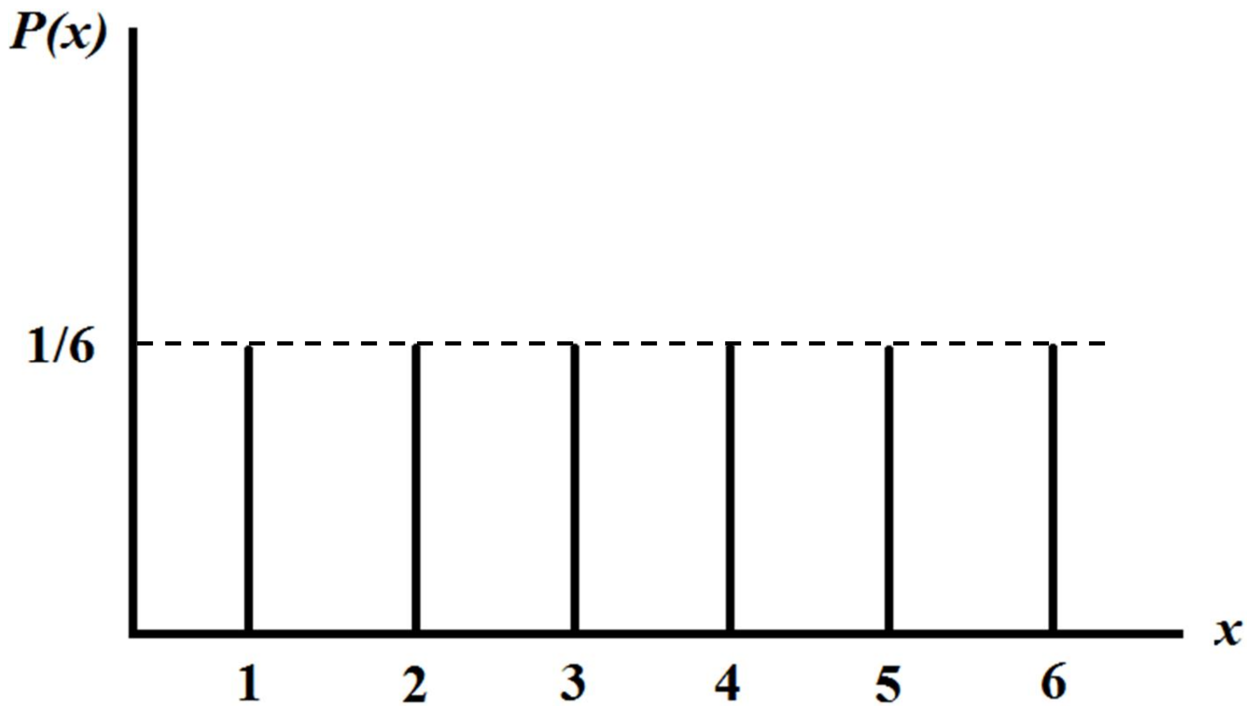
2.3.2. VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA: Este é o caso mais simples de *vad*, em que cada possível valor ocorre com a mesma probabilidade.

Definição: A *vad* X, assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tem distribuição uniforme se, e somente se,

$$P(X = x_i) = P(x_i) = P_i = 1/n, \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n$$

<u>Exemplo</u>: Seja o lançamento de um dado não viciado. O espaço amostral é: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Cada ponto de S tem probabilidade de ocorrer igual a 1/6.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6



2.4. VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTINUA(*vac*): Seja X uma variável aleatória (v.a.). Se X puder assumir todo e qualquer valor em algum intervalo $a \leq x \leq b$, em que a e b podem ser, respectivamente, $-\infty$ e $+\infty$, então X é uma *vac*. Assim, uma *va* X é contínua quando associada a um espaço amostral infinito não enumerável.

Exemplos:

- Volume de árvores,
- Área basal,
- Biomassa.

2.4.1. FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE: A função aqui denotada por *f(x)*, definida para $a \leq x \leq b$, será chamada *fdp* se satisfizer as seguintes condições:

a) $f(x) \geq 0$, *para todo* $x \in [a, b]$

b) $\int_a^b f(x)dx = 1$

Observações:

i) Para $c < d$, $P(c < X < d) = \int_c^d f(x)dx$

ii) Para um valor fixo de X, por exemplo, $X = x_0$, temos que:

$$P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$$

Sendo assim, as probabilidades abaixo são todas iguais, se X é uma *vac*:

$$P(c \leq X \leq d) = P(c \leq X < d) = P(c < X \leq d) = P(c < X < d)$$

iii) A função densidade de probabilidade $f(x)$, não representa probabilidade. Somente quando a função for integrada entre dois limites, ela produzirá uma probabilidade, que será a área sob a curva da função entre os valores considerados.

iv) Se o conjunto de valores de X não estiver contido no intervalo [a, b], então para $x \in [a, b]$, tem $f(x)$ igual a zero.

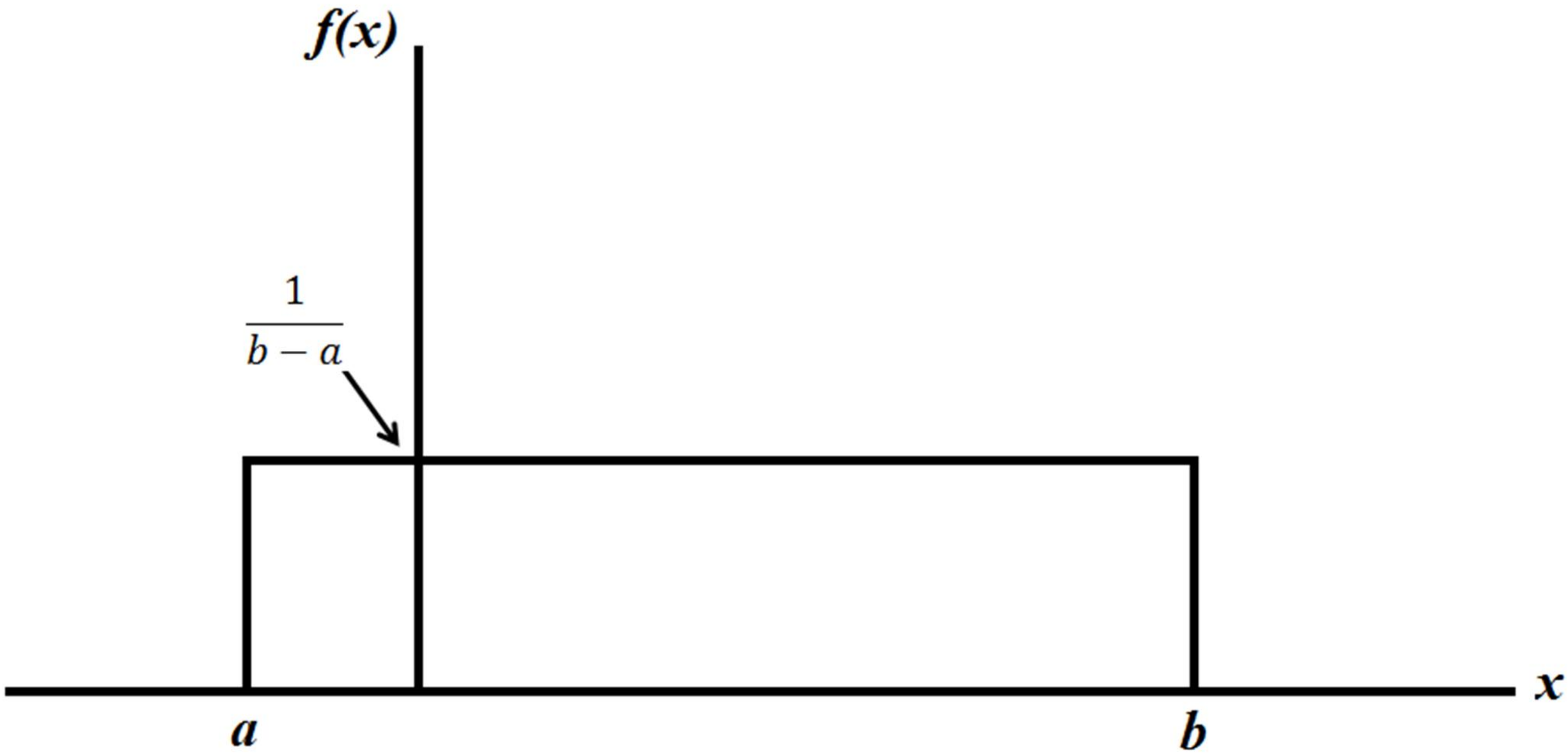
2.4.2. VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA:

Este é o caso mais simples de *vac*.

Definição: A *vac* *X* tem distribuição uniforme no intervalo *[a, b]*, sendo a e b finitos, se a sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & para\ a \le x \le b \\ 0, & para\ outros\ valores\ de\ x \end{cases}$$

GRÁFICO DA *fdp* DE UMA *vac* UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA



<u>Exercício</u>: Seja uma variável aleatória contínua definida pela seguinte *fdp*:

$$\begin{cases} 0, & para\ x < 0 \\ kx, & para\ \ 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & para\ x > 2 \end{cases}$$

a) Calcular o valor de *k*

b) Traçar o gráfico da *fdp*

c) Calcular $P(X \leq 1)$

Solução:

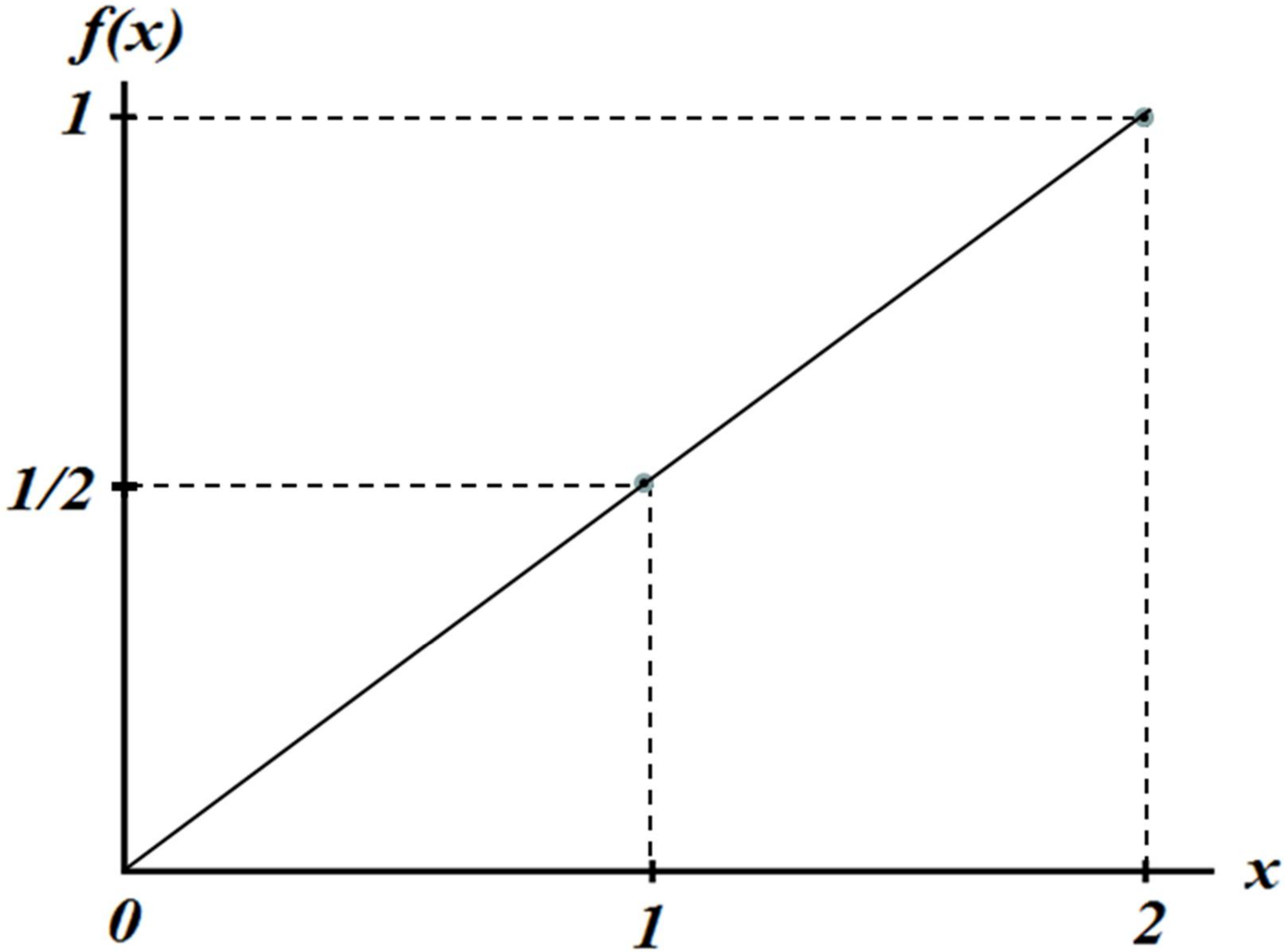
a)

$$\int_0^2 kx\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad k\int_0^2 x\,dx = 1$$

$$k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad k\left[\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = 1$$

$$\boldsymbol{k = \frac{1}{2}}$$

b) ***fdp*** → $f(x) = 1/2x$



c) Calcular $P(X \leq 1)$

$$\int_0^1 \frac{1}{2} x dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 x dx$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = \frac{1}{4}$$

$$\boldsymbol{P(X \leq 1) = \frac{1}{4}}$$

2.5. Função de distribuição acumulada

Definição: Dada a *va* X , chamaremos de função de distribuição acumulada ou, simplesmente, função de distribuição $F(x)$ a função $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriedades de *F(X)*:

i) $0 \leq F(x) \leq 1$

ii) Se $x_1 \leq x_2$, então $F(x_1) \leq F(x_2)$, isto é, $F(x)$ é não decrescente.

F(x)* para *X vad:

Para X uma *vad*, temos que:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum P(x_i), \quad \text{para } x_i \leq x$$

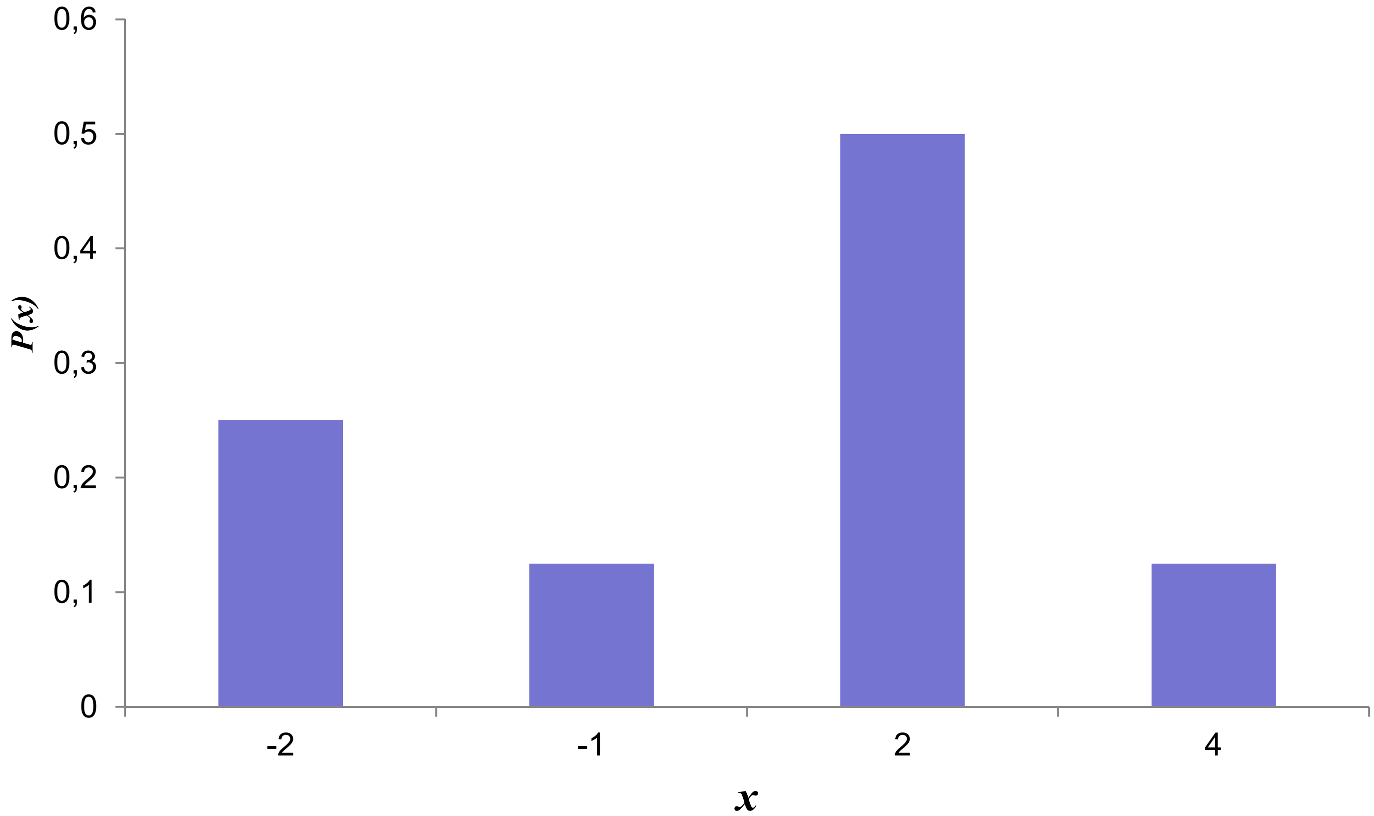
Exemplo: Seja X uma *vad* com a seguinte distribuição de probabilidade:

x_i	- 2	- 1	2	4	Total
$P(x_i)$	1/4	1/8	1/2	1/8	1,00

a) Traçar o gráfico da distribuição de probabilidade de X.

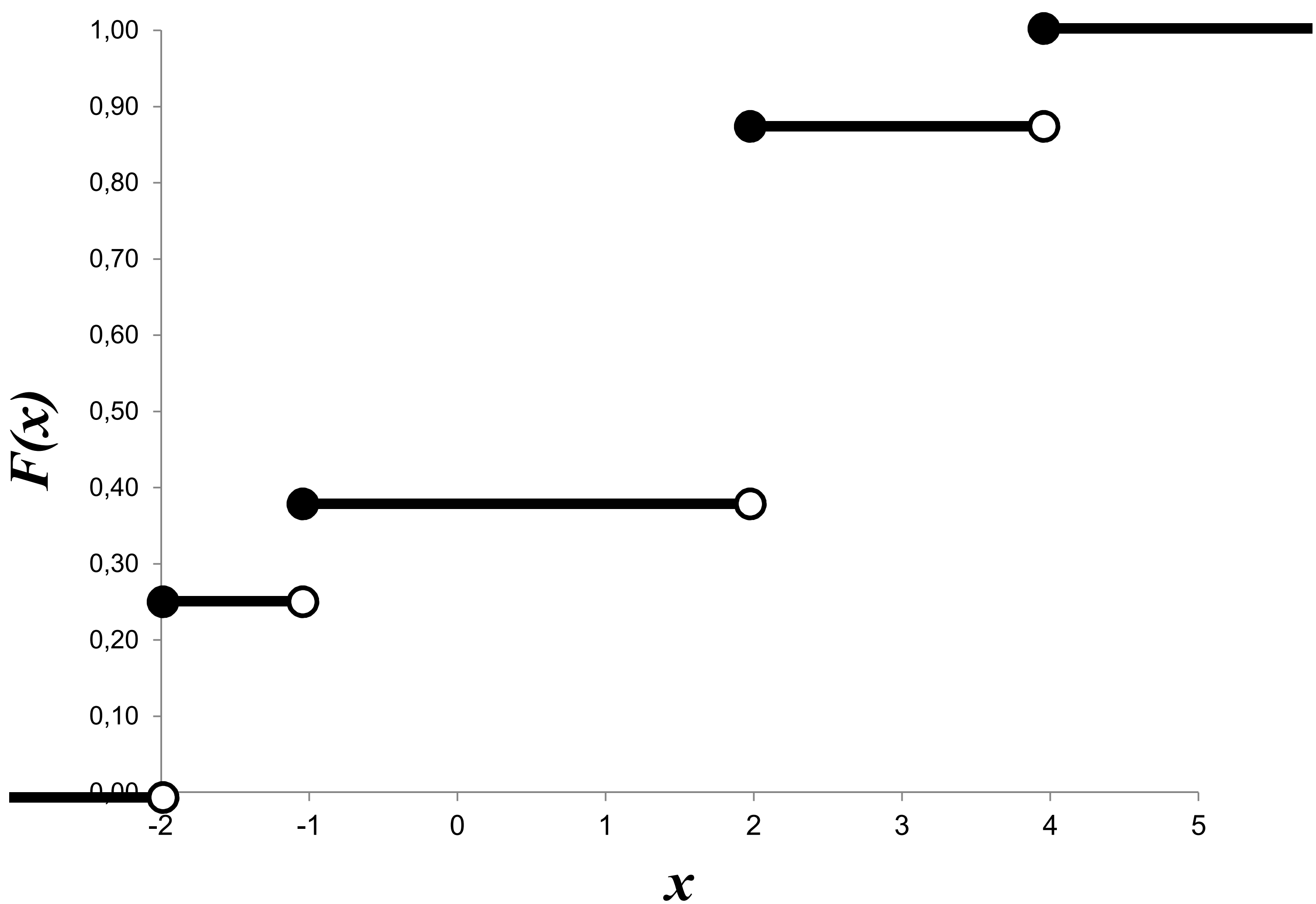
b) Obter a $F(x)$ e traçar o seu gráfico.

a) $fp = P_X(X = x_i) = P(s_j \in S\text{: } X(s_j) = x_i)$



b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ se \ -\infty < x < -2 \\ \frac{1}{4} \ se -2 \leq x < -1 \\ \frac{3}{8} \ se -1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} \ se \ 2 \leq x < 4 \\ 1 \ se \ 2 \leq x < \infty \end{cases}$$



1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
F(x)
-2
-1
0
1
2
3
4
5
x

***F(x)* para *X vac*:**

Para X uma *vac*, temos que:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$$

Temos ainda que,

$$P(c < X \leq d) = F(d) - F(c) = \int_{c}^{d} f(x)dx$$

A partir do apresentado, é fácil deduzir que

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

<u>Exemplo</u>: Seja *X* uma *vac* com a seguinte *fdp*:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & para\ 0 \le x < 2 \\ \frac{1}{6}(x-1), & para\ 2 \le x \le 4 \\ 0, & para\ x < 0\ e\ x > 4 \end{cases}$$

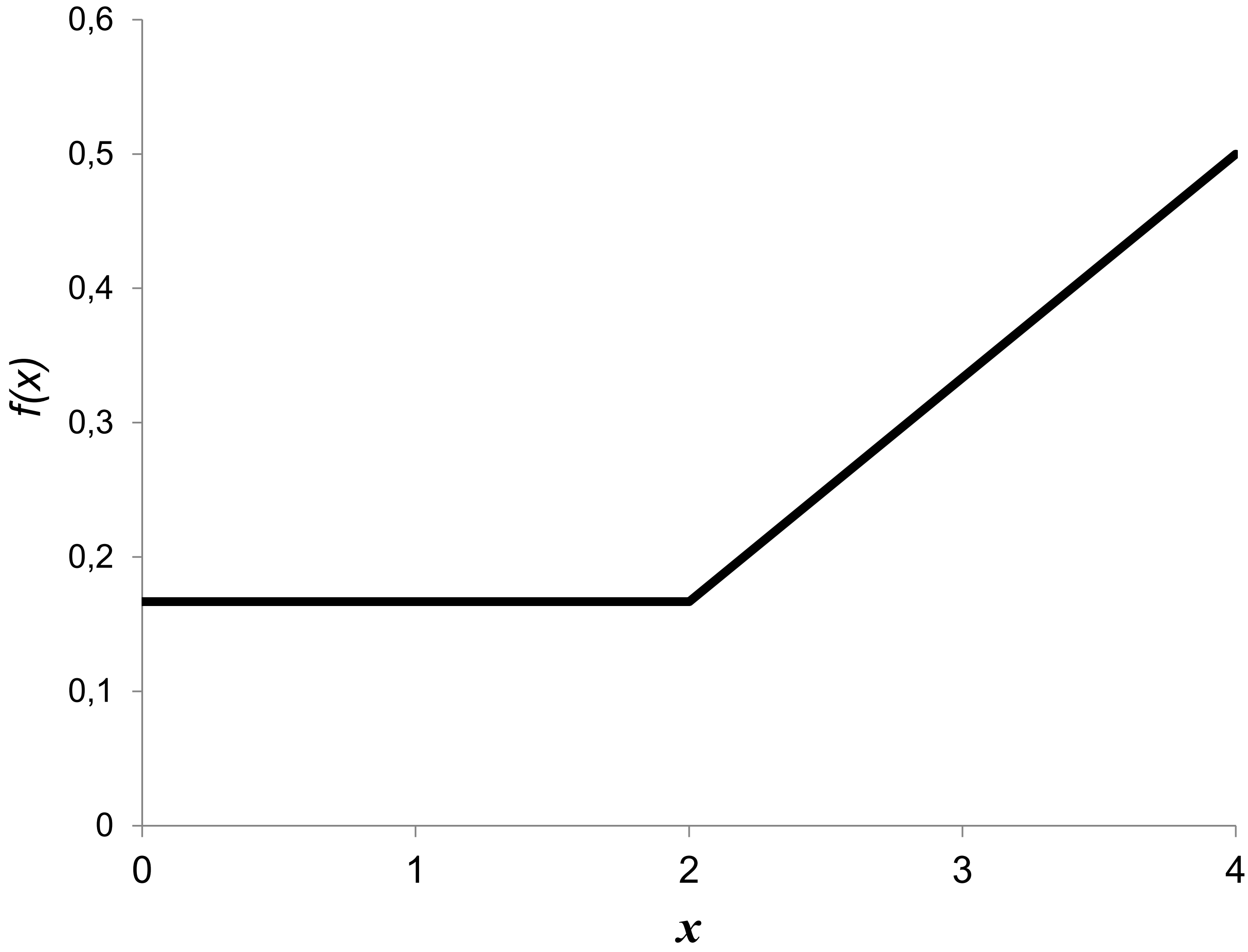
Pede-se:

a) Traçar o gráfico da *fdp*.

b) Obter *F(x)* e traçar o seu gráfico.

c) Calcular $P(1 \le X \le 3)$

a) <u>Gráfico da função densidade de probabilidade (*fdp*)</u>:



b) $F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$

$$\int_0^2 \frac{1}{6} dx + \int_2^4 \frac{1}{6}(x-1)dx$$

$$\int_0^2 \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6}[x]_0^2 = \frac{1}{6}[2-0] = \frac{1}{3}$$

$$\int_2^4 \frac{1}{6}(x-1)dx = \frac{1}{6}\left[\int_2^4 xdx - \int_2^4 dx\right]$$

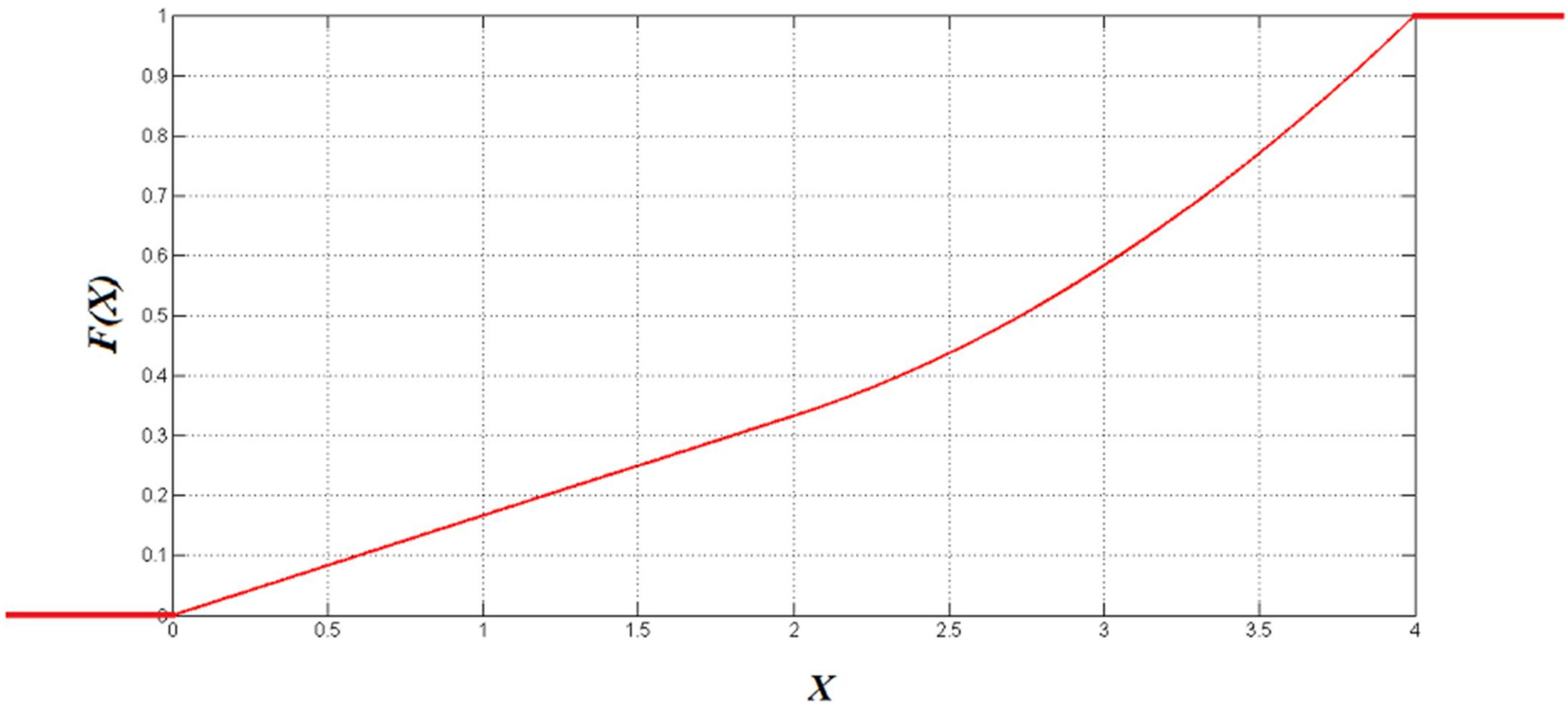
$$\frac{1}{6}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 - [x]_2^4\right\} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6}\left[\left(\frac{16}{2} - \frac{4}{2}\right) - (4-2)\right] = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{6} dx + \int_2^4 \frac{1}{6}(x-1)dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

<u>Função acumulada *F(x)* para *X vac*</u>:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ se \ -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{6}x \ \ se \ \ 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left[\frac{x^2}{2} - x\right] \ se \ 2 \leq x \leq 4 \\ 1 \ se \ 4 < x < \infty \end{cases}$$

<u>Gráfico da função acumulada *F(x)* para *X vac*</u>:



c) Calcular *P(1 ≤ X ≤ 3)*

$$P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^2 \frac{1}{6} dx + \int_2^3 \frac{1}{6}(x-1)dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6}[x]_1^2 = \frac{1}{6}[2-1] = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

$$\int_2^3 \frac{1}{6}(x-1)dx = \frac{1}{6}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 - [x]_2^3\right\} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

$$P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^2 \frac{1}{6} dx + \int_2^3 \frac{1}{6}(x-1)dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{5}{12}}$$

2.6. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS

Ocorre quando para um determinado experimento, cada resultado é proveniente da avaliação simultânea de dois caracteres, por exemplo, o diâmetro e a altura de uma árvore.

Definição: Seja E um experimento e S um espaço amostral associado a E. Sejam $X = X(s)$ e $Y = Y(s)$, duas funções, cada uma associando um número real a cada resultado $s \in S$. Denominaremos (X, Y) uma variável aleatória bidimensional.

A variável aleatória (X, Y) pode ser:

a) X e Y discretos,

b) X e Y contínuos,

c) X discreto e Y contínuo ou

d) Y discreto e X contínuo.

No caso desta disciplina, consideraremos as situações a e b. É valido mencionar que há situações em que X e Y não estão necessariamente ligados a um mesmo experimento, mas existe uma razão bem definida para considera-los conjuntamente.

2.7. DISTRIBUIÇÃO CONJUNTA DE DUAS VARIÁVEIS ALEATÓRAIS

***(X, Y)* é *vad* bidimensional**:

(X, Y) será uma *vad* bidimensional se os valores possíveis de X e Y forem finitos ou infinitos enumeráveis, isto é, se os valores possíveis de (X, Y) podem ser representados por:

(x_i , y_j) para $i = 1, 2, \ldots , r$ e $j = 1, 2, \ldots , s$.

Função de probabilidade conjunta de *X* e *Y*:

Chama-se de função de probabilidade conjunta da *vad* bidimensional (*X*, *Y*), a função $P(X = x_i\,,\ Y = y_j) = P(x_i\,, y_j) = P_{i\,j}$, que a cada valor de $(x_i\ ,\ y_j)$, associa sua probabilidade de ocorrência. A função $P(x_i\ ,\ y_j)$ será uma função de probabilidade conjunta se atender às seguintes exigências:

a) $\boldsymbol{P(x_i\,, y_j) \geq 0}$, *para todo par* $(x_i\,, y_j)$

b) $\sum_i \sum_j P(x_i, y_j) = 1$

Distribuição de probabilidade conjunta

É o conjunto $\{(x_i, y_j), P(x_i, y_j)\}$ para $i = 1, 2, \ldots, r$ e $j = 1, 2, \ldots, s$

X \ Y	y_1	y_2	…	y_s	$P(X = x_i)$
x_1	$P(x_1, y_1)$	$P(x_1, y_2)$	…	$P(x_1, y_s)$	$P(X = x_1)$
x_2	$P(x_2, y_1)$	$P(x_2, y_2)$	…	$P(x_2, y_s)$	$P(X = x_2)$
…	…	…	…	…	…
x_r	$P(x_r, y_1)$	$P(x_r, y_2)$	…	$P(x_r, y_s)$	$P(X = x_r)$
$P(Y = y_j)$	$P(Y = y_1)$	$P(Y = y_2)$	…	$P(Y = y_s)$	1,00

Distribuições marginais

Dada a distribuição conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y, pode-se determinar a distribuição de X sem considerar Y e a de Y sem considerar X. Essas distribuições são chamadas de marginais.

A distribuição marginal é constituida pelos valores da variável aleatória e suas respectivas probabilidades marginais. A probabilidade marginal para cada valor é obtida da seguinte forma:

Para X: $P(X = x_i) = P(x_i) = \sum_{j=1}^{s} P(x_i, y_j)$

Para Y: $P(Y = y_i) = P(y_i) = \sum_{i=1}^{r} P(x_i, y_j)$

Com as probabilidades marginais para cada valor, pode-se construir a distribuição marginal para a variável aleatória.

Para *X*

x_i	x_1	x_2	…	x_r	Total
$P(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	…	$P(x_r)$	1,00

Para *Y*

y_j	y_1	y_2	…	y_s	Total
$P(y_j)$	$P(y_1)$	$P(y_2)$	…	$P(y_s)$	1,00

Distribuições condicionais

Sabe-se que $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}, \qquad P(A) > 0$

Seja x, um valor de X, tal que $P(X = x_i) = P(x_i) > 0$
A probabilidade

$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)}$$

é denominada probabilidade condicional de $Y = y_j$, dado que $X = x_i$.

Para x_i fixado, os pares $[y_j,\ P(Y = y_j / X = x_i)]$ definem a distribuição condicional de Y, dado que $X = x_i$.

y_j	y_1	y_2	…	y_s	**Total**
$P(Y=y_j/X=x_i)$	$P(Y=y_1/X=x_i)$	$P(Y=y_2/X=x_i)$	$\cdots$	$P(Y=y_s/X=x_i)$	**1,00**

Analogamente para X:

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$$

x_i	x_1	x_2	…	x_r	**Total**
$P(X=x_i/Y=y_j)$	$P(X=x_1/Y=y_j)$	$P(X=x_2/Y=y_j)$	$\cdots$	$P(X=x_r/Y=y_j)$	**1,00**

***(X, Y)* é *vac* bidimensional**:

(X, Y) será uma *vac* bidimensional se X e Y puderem assumir todos os valores em algum conjunto não enumerável.

função densidade de probabilidade conjunta

Seja (X, Y) uma *vac* bidimensional. Dizemos que $f(x,y)$ é uma função densidade de probabilidade conjunta de X e Y, se satisfizer às seguintes condições:

a) $f(x, y) \geq 0, \qquad para\ todo\ (x, y)$

b) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dxdy = 1$

f(x, y) = 0 para todo *(x, y)* $\notin$ aos intervalos de *x* e *y*.

Temos ainda que:

$$P(a \leq X \leq b,\ c \leq Y \leq d) = \int_{c}^{d}\int_{a}^{b} f(x, y) dxdy$$

Distribuições marginais

As *fdp's* marginais de *X* e *Y* são dadas por:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \qquad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

Temos ainda que:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} g(x)dx \qquad P(c \leq Y \leq d) = \int_{c}^{d} h(y)dy$$

Distribuições condicionais

Sejam X e Y *vac* com *fdp* conjunta $f(x, y)$ e *fdp* marginais dadas por $g(x)$ e $h(y)$. A *fdp* condicional de X, dado que $Y = y$ é definida por:

$$f\left({}^{x}/_{y}\right) = \frac{f(x,y)}{h(y)}\ , \qquad h(y) > 0$$

Analogamente, a *fdp* condicional de Y, dado que $X = x$ é definida por:

$$f\left({}^{y}/_{x}\right) = \frac{f(x,y)}{g(x)}\ , \qquad g(x) > 0$$

As *fdp's* condicionais anteriores satisfazem a todas as condições impostas para uma *fdp* unidimensional.

Deste modo, para *y* fixado, teremos:

a) $f(x/y) \geq 0$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x/y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{h(y)} dx = \frac{1}{h(y)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \frac{h(y)}{h(y)} = 1$

Variáveis aleatórias independentes

***(X, Y)* é *vad* bidimensional:**

Seja (X, Y) *vad* bidimensional. Dizemos que X e Y são independentes se, e somente se, para todo par de valores (x_i, y_j) de X e Y, tem-se:

$$P(X = x_i\,,\ Y = y_j) = P\,(X = x_i)*P(Y = y_j)$$

Basta que esta condição não se verifique para um par $(x_i\ ,\ y_j)$ para que X e Y não sejam independentes. Neste caso diremos que X e Y são dependentes.

Pode-se dizer ainda que, sendo *(X, Y)* uma *vad* bidimensional, neste caso, *X* e *Y* serão independentes se, e somente se,

$$P(X = x_i / Y = y_j) = P(X = x_i) \text{ para todo } i \text{ e } j$$

ou equivalente se, e somente se:

$$P(Y = y_j / X = x_i) = P(Y = y_j) \text{ para todo } i \text{ e } j$$

Variáveis aleatórias independentes

(X, Y) é *vac* bidimensional:

Seja (X, Y) *vac* bidimensional. Dizemos que X e Y são independentes se, e somente se,

$$f(x, y) = g(x) * h(y) \quad \textit{para todo x e todo y}$$

Seja ainda (X, Y) *vac* bidimensional. Neste caso X e Y serão independentes se, e somente se:

$$f(x / y) = g(x) \quad \text{ou} \quad f(y / x) = h(y)$$

<u>Exemplo 1</u>: Dada a distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y) na tabela abaixo:

X \ Y	**0**	**1**	**2**	
0	0,10	0,20	0,20	
1	0,04	0,08	0,08	
2	0,06	0,12	0,12	
				1,00

Pede-se:

a) Distribuição marginal de X, Y, $X + Y$, XY.

b) X e Y são independentes?

c) As distribuições condicionais de X dado que $Y = 0$ e Y dado que $X = 1$.

d) $P(X \geq 1,\ Y \leq 1)$.

e) $P(X \leq 1 / Y = 0)$.

Solução:

a)

Marginal de *X*

x_i	0	1	2	Total
$P(x_i)$	0,50	0,20	0,30	1,00

Marginal de *Y*

x_i	0	1	2	Total
$P(x_i)$	0,20	0,40	0,40	1,00

Marginal de $X + Y$

$X + Y = 0 \;\rightarrow\; P(0, 0) = 0{,}10$ ➡ $P(X + Y = 0) = 0{,}10$

$X + Y = 1 \;\rightarrow\; P(0, 1) = 0{,}20$
$P(1, 0) = 0{,}04$ ➡ $P(X + Y = 1) = 0{,}24$

$X + Y = 2 \;\rightarrow\; P(0, 2) = 0{,}20$
$P(2, 0) = 0{,}06$
$P(1, 1) = 0{,}08$ ➡ $P(X + Y = 2) = 0{,}34$

$X + Y = 3 \;\rightarrow\; P(1, 2) = 0{,}08$
$P(2, 1) = 0{,}12$ ➡ $P(X + Y = 3) = 0{,}20$

$X + Y = 4 \;\rightarrow\; P(2, 2) = 0{,}12$ ➡ $P(X + Y = 4) = 0{,}12$

$X_i + Y_i$	0	1	2	3	4	Total
$P(x_i + y_i)$	0,10	0,24	0,34	0,20	0,12	1,00

Marginal de *XY*

$XY = 0 \rightarrow P(0, 0) = 0{,}10$

$P(0, 1) = 0{,}20$

$P(0, 2) = 0{,}20$

$P(1, 0) = 0{,}04$

$P(2, 0) = 0{,}06$

$\Rightarrow P(XY = 0) = 0{,}60$

$XY = 1 \rightarrow P(1, 1) = 0{,}08 \Rightarrow P(XY = 1) = 0{,}08$

$XY = 2 \rightarrow P(1, 2) = 0{,}08$

$P(2, 1) = 0{,}12$

$\Rightarrow P(XY = 2) = 0{,}20$

$XY = 4 \rightarrow P(2, 2) = 0{,}12 \Rightarrow P(XY = 4) = 0{,}12$

X_iY_i	0	1	2	4	Total
$P(x_iy_i)$	0,60	0,08	0,20	0,12	1,00

b) X e Y são independentes?

X \ Y	**0**	**1**	**2**	$P(X = x_j)$
0	0,10	0,20	0,20	**0,50**
1	0,04	0,08	0,08	**0,20**
2	0,06	0,12	0,12	**0,30**
$P(Y = y_j)$	**0,20**	**0,40**	**0,40**	1,00

Uma vez que as marginais reproduzem exatamente a função conjunta, ***X* e *Y* são variáveis aleatórias independentes**.

c) As distribuições condicionais de X dado que $Y = 0$ e Y dado que $X = 1$

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$$

x_i	0	1	2	Total
$P(X = x_i / Y = 0)$	0,50	0,20	0,30	1,00

$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)}$$

y_j	0	1	2	Total
$P(Y = y_j / X = 1)$	0,20	0,40	0,40	1,00

d) $P(X \geq 1,\ Y \leq 1) = 0{,}04 + 0{,}08 + 0{,}06 + 0{,}12 =$ **0,30**

e) $P(X \leq 1 / Y = 0) = 0{,}50 + 0{,}20 =$ **0,70**

<u>Exemplo 2</u>: Sejam *X* e *Y* *vac* com *fdp* conjunta dada por:

$$\begin{cases} k(2x+y), & 2 \leq x \leq 6 \ \ e \ \ 0 \leq y \leq 5 \\ \quad 0, & para\ outros\ valores\ de\ x\ e\ y \end{cases}$$

Pede-se:

a) O valor de *k*.

b) $P(X \leq 3,\ 2 \leq Y \leq 4)$

c) $P(Y < 2)$

d) $P(X > 4)$

e) *X* e *Y* são independentes? Justifique.

f) $f(x/y)$ e $f(x/Y = 1)$

Solução:

a) Achar o valor de k:

$$\int_2^6 \int_0^5 k(2x + y)dxdy = 1$$

$$k\left[\int_0^5 \left(2\int_2^6 xdx + \int_2^6 ydx\right)dy\right] = 1$$

$$k\left[\int_0^5 \left(2\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^6 + y[x]_2^6\right)dy\right] = 1$$

$$k\left[\int_0^5 32 + 4ydy\right] = 1$$

$$k\left[32\int_0^5 dy + 4\int_0^5 y\,dy\right] = 1$$

$$k\left[32[y]_0^5 + 4\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^5\right] = 1$$

$$k\left[32(5-0) + 4\left(\frac{25}{2}\right)\right] = 1$$

$$k[160 + 50] = 1$$

$$\boldsymbol{k = \frac{1}{210}}$$

b) $P(X \leq 3,\ 2 \leq Y \leq 4)$

$$P(X \leq 3, 2 \leq Y \leq 4) = \int_2^3 \int_2^4 \frac{1}{210}(2x + y)dxdy =$$

$$\frac{1}{210}\left[\int_2^4 \left(2\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 + y[x]_2^3\right)dy\right] =$$

$$\frac{1}{210}\left[\int_2^4 5 + ydy\right] =$$

$$\frac{1}{210}\left[5\int_{2}^{4} dy + \int_{2}^{4} y dy\right] =$$

$$\frac{1}{210}\left[5[y]_2^4 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_2^4\right] =$$

$$\frac{1}{210}\left[5(4-2) + \left(\frac{16}{2} - \frac{4}{2}\right)\right] = \frac{1}{210}[10+6]$$

$$\boldsymbol{P(X \leq 3, 2 \leq Y \leq 4) = \frac{16}{210} = 0,07679}$$

c) $P(Y < 2)$

$$P(Y < 2) = \int_{2}^{6}\int_{0}^{2} \frac{1}{210}(2x + y)dxdy =$$

$$\frac{1}{210}\left[\int_{0}^{2}\left(2\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^6 + y[x]_2^6\right)dy\right] =$$

$$\frac{1}{210}\left[\int_{0}^{2} 32 + 4ydy\right] =$$

$$\frac{1}{210}\left[32\int_0^2 dy + 4\int_0^2 ydy\right] =$$

$$\frac{1}{210}\left[32[y]_0^2 + 4\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2\right] =$$

$$\frac{1}{210}\left[32(4-2) + 4\left(\frac{4}{2}\right)\right] = \frac{1}{210}[64+8]$$

$$\boldsymbol{P(Y<2) = \frac{72}{210} = 0,34286}$$

d) $P(X > 4)$

$$P(X > 4) = \int_4^6 \int_0^5 \frac{1}{210}(2x + y)dxdy =$$

$$\frac{1}{210}\left[\int_4^6 \left(2x[y]_0^5 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^5\right) dx\right] =$$

$$\frac{1}{210}\left[\int_4^6 10x + \frac{25}{2} dx\right] =$$

$$\frac{1}{210}\left[10\int_{4}^{6} x dx + \frac{25}{2}\int_{4}^{6} dx\right] =$$

$$\frac{1}{210}\left[10\left[\frac{x^2}{2}\right]_4^6 + \frac{25}{2}[x]_4^6\right] =$$

$$\frac{1}{210}\left[5(36-16) + \frac{25}{2}(6-4)\right] = \frac{1}{210}[100+25]$$

$$\boldsymbol{P(X>4) = \frac{125}{210} = 0,59328}$$

e) *X* e *Y* são *v.a.* Independentes? Justifique.

Seja (*X*, *Y*) *vac* bidimensional. Dizemos que *X* e *Y* são independentes se, e somente se,

$$f(x, y) = g(x) * h(y) \quad \textit{para todo x e todo y}$$

$$g(x) = \int_0^5 \frac{1}{210}(2x + y)dy =$$

$$\frac{1}{210}\left[2x[y]_0^5 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^5\right] = \frac{1}{210}\left[10x + \frac{25}{2}\right]$$

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{4x + 5}{84}}$$

$$h(y) = \int_2^6 \frac{1}{210}(2x + y)dx =$$

$$\frac{1}{210}\left[2\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^6 + y[x]_2^6\right] = \frac{1}{210}[32 + 4y]$$

$$\boldsymbol{h(y) = \frac{16 + 2y}{105}}$$

$$g(x) * h(y) = \left(\frac{4x + 5}{84}\right)\left(\frac{16 + 2y}{105}\right) = \frac{32x + 5y + 4xy + 40}{4410}$$

f(x, y) ≠ g(x)*h(y) ,

portanto, *X* e *Y* não são *v.a.* Independentes.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4x+5}{84}, & 2 \leq x \leq 6 \\ 0, & para\ outros\ valores\ de\ x \end{cases}$$

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{16+2y}{105}, & 0 \leq x \leq 5 \\ 0, & para\ outros\ valores\ de\ y \end{cases}$$

Obs: As funções *g(x)* e *h(y)* podem ser empregadas para se calcular probabilidades relativas apenas a *X* ou a *Y*, respectivamente (letras d e c do exercício 2).

f) $f(x/y)$ e $f(x/Y = 1)$

$$f\left({}^{x}/_{y}\right) = \frac{f(x,y)}{h(y)}\,, \qquad h(y) > 0$$

$$f\left({}^{x}/_{y}\right) = \frac{\frac{2x + y}{210}}{\frac{16 + 2y}{105}} = \frac{210x + 105y}{3360 + 420y}$$

$$f\left({}^{x}/_{Y\,=\,1}\right) = \frac{210x + 105 * 1}{3360 + 420 * 1} = \frac{210x + 105}{3360 + 420}$$

3. MEDIDAS DE POSIÇÃO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

3.1. ESPERANÇA MATEMÁTICA, VALOR ESPERADO OU MÉDIA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

Parâmetro é uma medida utilizada para descrever uma característica de uma população e caracteriza a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória.

Sob o ponto de vista científico, a esperança matemática corresponde ao que se espera que aconteça em média.

3.1.1. Caso em que *X* é uma *vad*

Seja *X* uma *vad* com a seguinte distribuição de probabilidade:

x_i	x_1	x_2	…	x_n	Total
$P(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	…	$P(x_n)$	1,00

Define-se a esperança matemática como:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$$

Exemplo: **Considere o evento de lançamento de um dado. Neste caso, teremos a seguinte distribuição de probabilidades:**

x_i	1	2	3	4	5	6	Total
$P(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1,00

Neste caso, a esperança matemática será:

$$E(X) = 1*1/6 + 2*1/6 + 3*1/6 + 4*1/6 + 5*1/6 + 6*1/6$$

$$E(X) = 3,5$$

3.1.2. Caso em que *X* é uma *vac*

A esperança matemática de uma vac *X* é definida por:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

<u>Exemplo</u>: Uma *vac X* apresenta a seguinte *fdp*:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & para\ x < 0 \\ x/2 & para\ 0 \le x \le 2 \\ 0 & para\ x > 0 \end{cases}$$

Calcular a *E(X)*

$$E(X) = \int_0^2 x\frac{x}{2}dx \Rightarrow E(X) = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx$$

$$E(X) = \frac{1}{2}\left[\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2\right] \Rightarrow E(X) = \frac{1}{2}\left[\frac{8}{3} - 0\right]$$

$$\boldsymbol{E(X) = \frac{4}{3}}$$

3.1.3. Propriedades da esperança matemática

A seguir serão apresentadas propriedades que, apesar de demonstradas apenas para o caso de *X* ser uma *vac*, valem igualmente para o caso de *X* ser uma *vad*.

P$_1$) Se *X* é uma va com *P(X = k) = 1*, então a esperança de *X* é igual a *K*, isto é, a média de uma constante é a própria constante.

Prova: $E(k) = \int_{-\infty}^{\infty} kf(x)dx = k\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = k$

Portanto, $\boldsymbol{E(k) = k}$

P_2) A esperança matemática do produto de uma constante por uma variável é igual ao produto da constante pela esperança matemática da variável, ou seja, multiplicando-se uma variável aleatória por uma constante, sua média fica multiplicada por essa constante.

Prova:

$$E(kX) = \int_{-\infty}^{\infty} kxf(x)dx = k\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = kE(x)$$

Portanto,

$$\boldsymbol{E(kX) = kE(X)}$$

P_3) **A esperança matemática do produto de duas variáveis aleatórias <u>independentes</u> é igual ao produto das esperanças matemáticas das variáveis, ou seja, a média do produto de duas variáveis aleatórias <u>independentes</u> é o produto das médias.**

Prova:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy$$

Se *X* e *Y* são *va* independentes, a *fdp* conjunta pode ser fatorada no produto das *fdp's* marginais de *X* e *Y*. Assim:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyg(x)h(y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} yh(y)dy$$

$$\boldsymbol{E(XY) = E(X)E(Y)}$$

<u>Obs</u>: *E(XY) = E(X)E(Y)* não implica que *X* e *Y* sejam *va* independentes.

P$_4$) A esperança matemática da soma ou da subtração de duas *va* quaisquer é igual a soma ou subtração das esperanças matemáticas das duas *va*.

Prova:

$$E(X \pm Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x \pm y) f(x, y) dx dy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy \pm \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy =$$

$$E(X \pm Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) dx \pm \int_{-\infty}^{\infty} y h(y) dy$$

$$\boldsymbol{E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)}$$

P$_5$) A esperança matemática da soma ou da subtração de uma *va* com uma constante é igual a soma soma ou subtração da esperança matemática com a constante.

Prova:

$$E(X \pm K) = \int_{-\infty}^{\infty} (x \pm K) f(x) dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \pm \int_{-\infty}^{\infty} K f(x) dx = E(X) \pm K$$

$$\boldsymbol{E(X \pm K) = E(X) \pm K}$$

P_6) A média de uma variável centrada é zero, ou seja, a média dos desvios dos valores da *va* em relação a sua média é zero.

Obs: Dizemos que a *va* está centrada na média quando todos os valores são expressos como desvios em relação à respectiva média, isto é, $(X - \mu_x)$.

$$E(X - \mu_X) = E(X) - E(\mu_X) = \mu_X - \mu_X = 0$$

$$E(X - \mu_X) = 0$$

Em resumo, tem-se:

$$E(k) = k$$

$$E(kX) = kE(X)$$

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$ **Para X e Y independentes.**

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

$$E(X \pm K) = E(X) \pm K$$

$$E(X - \mu_x) = 0$$

3.2. Mediana de uma variável aleatória continua (*Md*)

A mediana é o valor de *X* que divide a distribuição em duas partes equiprováveis, ou seja:

$$P(X \leq Md) = P(X > Md) = 1/2$$

Para *X* uma *vac*, o valor de *X* = *Md* é obtido por:

$$\int_{-\infty}^{Md} f(x)dx = \frac{1}{2} = \int_{Md}^{\infty} f(x)dx$$

3.3. Moda de uma variável aleatória (*M*o)

É o valor que possui maior probabilidade no caso discreto ou maior densidade de probabilidade no caso contínuo.

<u>Exemplo</u>: *X* é uma *vac* tal que:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & para\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & para\ outros\ valores\ de\ x \end{cases}$$

Calcular:

a) E(X)

b) Moda

c) Mediana

d) Para *Y = 3X + 8*, calcule a *E(Y)*

Solução

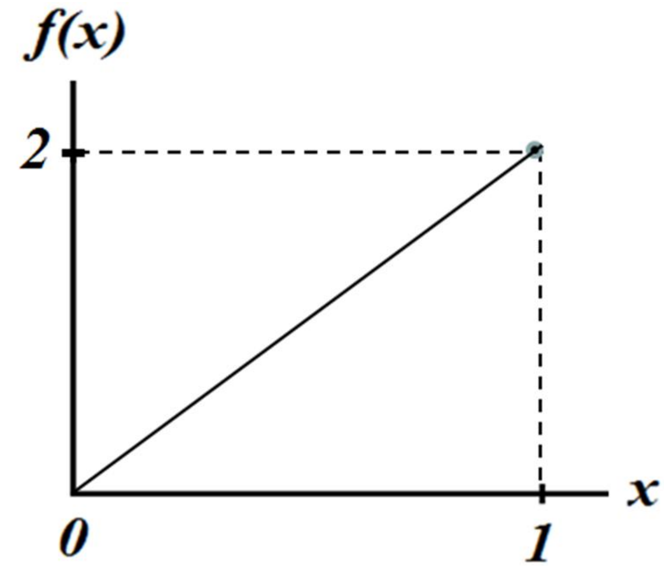
a) *E(X)*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{1} x 2x dx =$$

$$E(X) = 2\int_{0}^{1} x^2 dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E(X) = \frac{2}{3}}$$

b) Moda

$$\boldsymbol{Mo = 1}$$



c) Mediana

$$\int_0^{Md} f(x)dx = \frac{1}{2} \qquad \rightarrow \qquad \int_0^{Md} 2xdx = \frac{1}{2}$$

$$2\int_0^{Md} xdx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{Md} = \frac{1}{2} \qquad \rightarrow \qquad 2\left[\frac{Md^2}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{Md = 0,707107}$$

d) ***E(Y) = E(3X + 8) = 3E(X) + E(8)***

$$E(Y) = 3\frac{2}{3} + 8 = 10$$

$$\boldsymbol{E(Y) = 10}$$

4. MEDIDAS DE DISPERSÃO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

4.1. VARIÂNCIA

É a medida que quantifica a dispersão dos valores em torno da média. A variância de uma variável aleatória *X* é definida por:

$$V(X) = \sigma_x^2 = E[X - E(X)]^2 = E[X - \mu_x]^2$$

Para *X vad*: $$V(X) = \sum_i (x_i - \mu_x)^2 P(x_i)$$

Para *X vac*: $$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx$$

Uma fórmula mais prática para calcular a variância é:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Pois,

$$V(X) = E[X - E(X)]^2$$

$$V(X) = E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\}$$

$$V(X) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Em que:

$$E(X^2) = \sum_i (x_i)^2 P(x_i)$$

vad

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

vac

4.1.1. Propriedades da variância

Valendo tanto para *X vad* quanto para *X vac*, tem-se:

P_1) A variância de uma constante é igual a zero.

Prova:

$$\boldsymbol{V(k) = E[k - E(k)]^2}$$

$$\boldsymbol{V(k) = E[k - k]^2}$$

$$\boldsymbol{V(k) = 0}$$

$P_2)$ **Somando-se ou subtraindo-se uma constante a uma *va*, sua variância não se altera.**

Prova:

$$V(X \pm k) = E[(X \pm k) - E(X \pm k)]^2$$

$$V(X \pm k) = E[X - E(X) \pm (k - k)]^2$$

$$V(X \pm k) = E[X - E(X)]^2 = V(X)$$

$$V(X \pm k) = V(X)$$

P$_3$) Multiplicando-se uma *va* por uma constante, sua variância fica multiplicada pelo quadrado da constante.

Prova:

$$V(kX) = E[kX - E(kX)]^2$$

$$V(kX) = E[kX - kE(X)]^2$$

$$V(kX) = E\{k[X - E(X)]\}^2$$

$$V(kX) = k^2[X - E(X)]^2$$

$$V(kX) = k^2 V(X)$$

P_4) **A variância da soma de duas *va* independentes é igual a soma das variâncias das duas variáveis.**

Prova:

$$V(X+Y) = E[X+Y]^2 - [E(X+Y)]^2$$

$$= E(X^2 + 2XY + Y^2) - [E(X) + E(Y)]^2$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - \{[E(X)]^2 + 2E(X)E(Y) + [E(Y)]^2\}$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - [E(X)]^2 - 2E(X)E(Y) - [E(Y)]^2$$

se <u>*X* e *Y* são independentes</u>, *E(XY) = E(X)E(Y)*, assim

$$V(X+Y) = \{E(X^2) - [E(X)]^2\} + \{E(Y^2) - [E(Y)]^2\}$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Do mesmo modo:

$$\boldsymbol{V(X-Y)=V(X)+V(Y)}$$

Por outro lado, se *X* e *Y* não são independentes, isto é, *X* e *Y* são *va* quaisquer, tem-se que:

$$\boldsymbol{V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2cov(X,Y)}$$

$$\boldsymbol{V(X-Y)=V(X)+V(Y)-2cov(X,Y)}$$

Em resumo, tem-se:

$$V(k) = 0$$

$$V(X \pm k) = V(X)$$

$$V(kX) = k^2 V(X)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Caso *X* e *Y* sejam *va* independentes

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X, Y)$$

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2cov(X, Y)$$

Caso *X* e *Y* não sejam *va* independentes

4.2. Desvio padrão

O desvio padrão da variável *X* é a raiz quadrada positiva da variância de *X*.

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)}$$

5. Covariância

Sejam *X* e *Y* duas variáveis aleatórias. A covariância denotada por *Cov(X, Y)* é definida por:

$$Cov(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

Desenvolvendo a expressão anterior, tem-se:

$$Cov(X,Y) = E\{XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)\}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y)$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Em que:

Para *vad*: $$E(XY) = \sum_i \sum_j x_i\, y_j P(x_i, y_j)$$

Para *vac*: $$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy$$

Para que haja covariância é necessário que existam pelo menos duas variáveis aleatórias. A covariância nos dá uma ideia da relação de dependência entre as variáveis.

Proposições:

P_1) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$, a covariância é simétrica.

P_2) Se $V(X) = 0$ ou $V(Y) = 0$, então $Cov(X, Y) = 0$.

P_3) $Cov(aX, Y) = aCov(X, Y)$, sendo a uma constante.

P_4) $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$, sendo a e b constantes.

P_5) $Cov(X + Z, Y) = Cov(X, Y) + Cov(Z, Y)$.

6. Coeficiente de correlação

Define-se o coeficiente de correlação populacional (ρ_{XY}) entre as variáveis aleatórias *X* e *Y*, por:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \qquad -1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

O coeficiente de correlação mede o grau de associação entre duas variáveis aleatórias *X* e *Y*.

Fatos:

- **Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então $Cov(X, Y) = 0$ e consequentemente $\rho_{XY} = 0$.**

- **$Cov(X, Y) = 0$ não implica que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes, a não ser que X e Y tenham distribuição normal bivariada, ou seja, X e Y não correlacionadas ($\rho_{XY} = 0$) não equivale, em geral, que X e Y sejam independentes.**

Exercício:

Sabendo-se que X e Y são variáveis aleatórias independentes e que $E(X) = 5$, $V(X) = 2$, $E(Y) = 8$ e $V(Y) = 3$, Calcule:

a) $E(X - Y + 3)$

b) $E[(X - Y)^2]$

c) $V(X - 1/3Y)$

d) $V(3Y + 2)$

e) $V(2X + Y)$ admitindo-se que X e Y não são independentes e $\rho_{XY} = 0,7$

Solução:

a) $E(X - Y + 3)$

$$E(X - Y + 3) = E(X) - E(Y) + E(3)$$

$$= 5 - 8 + 3$$

$$E(X - Y + 3) = 0$$

b) $E[(X - Y)^2]$

$$E[(X - Y)^2] = E[X^2 - 2XY + Y^2]$$

$$= E(X^2) - 2E(XY) + E(Y^2)$$

mas, sabe-se que:

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ **Então,**

$E(X^2) = 2 + [5]^2 = 27$

Analogamente,

$E(Y^2) = 3 + [8]^2 = 67$

Sendo *X* e *Y* *va* independentes, *E(XY) = E(X)E(Y)*, então

$E(XY) = 5 * 8 = 40$ **Assim, tem-se**

$E(X - Y)^2 = 27 - 2 * 40 + 67 = 14$

$E(X - Y)^2 = 14$

c) $V\left(X-\frac{1}{3}Y\right)$ Admitindo que X e Y são *va* independentes, tem-se:

$$V\left(X-\frac{1}{3}Y\right)=V(X)+\frac{1}{9}V(Y)$$

$$V\left(X-\frac{1}{3}Y\right)=2+\frac{3}{9} \quad \Rightarrow \quad V\left(X-\frac{1}{3}Y\right)=\frac{7}{3}$$

d) $V(3Y+2)$

$$V(3Y+2)=9V(Y)=9*3$$

$$V(3Y+2)=27$$

e) *V(2X + Y)* admitindo-se que *X* e *Y* não são independentes e $\rho_{XY} = 0,7$

$$V(2X+Y) = 4V(X) + V(Y) + 4cov(X,Y)$$

Sabe-se que

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \Rightarrow Cov(X,Y) = \rho_{XY} * \sqrt{V(X)V(Y)}$$

$$Cov(X,Y) = 0,7 * \sqrt{2*3} \Rightarrow Cov(X,Y) = 1,71$$

$$V(2X+Y) = 4*2+3+4*1,71$$

$$V(2X+Y) \cong 17,84$$

FIM DO CAPITULO I